



TITLE:

The stratum with constant Milnor number of  
a mini-transversal family of a  
quasihomogeneous function of corank  
two(Singularities in Complex Analytic  
Geometry)

AUTHOR(S):

鈴木, 正彦

---

CITATION:

鈴木, 正彦. The stratum with constant Milnor number of a mini-transversal family of a quasihomogeneous function of corank two(Singularities in Complex Analytic Geometry). 数理解析研究所講究録 1982, 474: 7-22

ISSUE DATE:

1982-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103290>

RIGHT:

The stratum with constant Milnor number of a mini-transversal family of a quasihomogeneous function of corank two.

千葉大 理 鈴木正彦

V.I. Arnold は孤立特異点を持つ擬斉次正則函数芽  $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  の Milnor 数を保つ small perturbation は次のような family で尽くされるであろうと予想した。( [1] 参照 )

$$F_t(x) = f(x) + \sum t_j \varphi_j,$$

ここで,  $\varphi_j$  は  $f$  の Newton boundary の上及びその上にある有限次元ベクトル空間  $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} / (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$  の単項式基である。この予想に関する貢献には, Arnold [1], Yoshinaga & Suzuki [7], Kushnirenko & Gabrielov [3] などがある。我々は, この予想を corank 2 の場合に証明した。内容の詳細は次のようである。

定理.  $f$  を corank 2 の孤立特異点を持つ擬斉次正則函数芽  $F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  を  $f$  の mini-transversal family

とする。今、次のような  $\mathbb{C}^{m-1}$  の algebraic subset を考える

$$S_f = \{t \in \mathbb{C}^{m-1} \mid \mu(F_t) = \mu(f)\},$$

ここで,  $\mu(\ )$  は Milnor 数で,  $\mu = \mu(f)$  である。このとき  $S_f$  は non-singular で, その次元は  $f$  の Newton boundary の上及びその上にある有限次元ベクトル空間  $\mathbb{C}\{x, y\} / (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y)$  の単項式基の個数に等しい。

この定理から次の系が直ちに導びかれる。

系. 孤立特異点を持つ corank 2 の擬斉次正則函数芽の modality はその inner modality に等しい。(modality と inner modality の定義は [1], [2] を参照)

系. 0 を保つ正則函数芽全体の函数空間における, 擬斉次正則函数芽  $f$  を含む Milnor 数一定の stratum は non-singular algebraic subset で, その余次元は  $\mu(f) - \text{the inner modality of } f$  である。

### 定理の証明

$f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  を孤立特異点を持つ Milnor 数  $\mu$  の正則函数芽とする。  $S_f := \{t \in \mathbb{C}^{m-1} \mid \mu(F_t) = \mu(f)\}$  とおくと, こ

これは algebraic subset になることが良く知られている。

$$F(x, t) := f(x) + \sum_{i=1}^{\mu-1} t_i \phi_i(x),$$

ただし,  $\{\phi_1, \dots, \phi_{\mu-1}\}$  は有限次元  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間  $\mathcal{L}_f := \mathfrak{m}^2 / \mathfrak{m}(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$  の単項式基である。このような  $F$  は孤立特異点をもち, 原点を保つ正則函数芽の空間における, 原点を保つ双正則写像芽全体のなす Lie 群の作用による  $f$  の orbit に transversal で, その moduli 空間の次元が最も小さいものである。(このような  $F$  を  $f$  の mini-transversal family という)  $f$  を型  $(r_1, \dots, r_n)$  の quasihomogeneous とし,  $A_F := \{(t_1, \dots, t_{\mu-1}) \in \mathbb{C}^{\mu-1} \mid \text{quasidegree } \phi_i < 1 \text{ なる } i \text{ に対して } t_i = 0\}$  とおくと,  $S_F \supset A_F$  が知られている ([1] 参照)

$$f_1(x, y) := x^a + y^b + g(x, y) \quad a, b \geq 3$$

$$f_2(x, y) := x(x^a + y^b + g(x, y)) \quad a, b \geq 2$$

$$f_3(x, y) := xy(x^a + y^b + g(x, y)) \quad a, b \geq 1,$$

ここで,  $g$  は型  $(1/a, 1/b)$  の quasihomogeneous で,  $x^a, y^b$  を単項式として含まず,  $f_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) は孤立特異点を持つとする。 $f_1, f_2, f_3$  はそれぞれ型  $(1/a, 1/b), (1/(a+1), a/(a+1)b), (b/(ab+a+b), a/(ab+a+b))$  の quasi-homogeneous である。

$k$  を  $a, b$  の G.C.M.,  $a = ck, b = dk$  とする

$$f_1(x, y) = \prod_{i=1}^k (y^d + \zeta_i x^c), \quad \zeta_i \neq \zeta_j \quad (i \neq j)$$

という既約分解を得る。今,  $f_1, f_2, f_3$  の形に注意して, その偏微分を計算すれば, これらの mini-transversal family として次のようなものを得る。

$$F_1(x, y, t) = f_1(x, y) + \sum_{i=1}^{\mu_1-1} t_i \phi_{1i}(x, y),$$

ここで,  $\{\phi_{11}, \dots, \phi_{1\mu_1-1}\}$  は  $\mathcal{L}_{f_1}$  の monomial basis で, 単項式  $x^i y^{b-1}$  ( $i \geq 1$ ) を含まない。

$$F_2(x, y, t) = f_2(x, y) + \sum_{i=1}^{\mu_2-1} t_i \phi_{2i}(x, y)$$

$$F_2'(x, y, t) = f_2(x, y) + \sum_{i=1}^{\mu_2-1} t_i \phi_{2i}'(x, y)$$

ここで,  $\{\phi_{21}, \dots, \phi_{2\mu_2-1}\}$  (resp.  $\{\phi_{21}', \dots, \phi_{2\mu_2-1}'\}$ ) は  $\mathcal{L}_{f_2}$  の単項式基  $y^{b+i}$  ( $i \geq 1$ ),  $x^{i+1} y^{b-1}$  ( $i \geq 1$ ) (resp.  $x^a y^i$  ( $i \geq 1$ )) を含まない。  
(で, 単項式)

$$F_3(x, y, t) = f_3(x, y) + \sum_{i=1}^{\mu_3-1} t_i \phi_{3i}(x, y),$$

ここで,  $\{\phi_{31}, \dots, \phi_{3\mu_3-1}\}$  は  $\mathcal{L}_{f_3}$  の単項式基で, 単項式  $x^i y^b$  ( $i \geq 1$ ),  $y^{b+1+i}$  ( $i \geq 1$ ) を含まない。

以下, 次の3つの補題で, stratum  $S_{F_i}$ ,  $i=1, 2, 3$  を決定する。

補題1.

$$S_{F_1} = A_{F_1}$$

証明  $S_{F_1} - A_{F_1} \neq \emptyset$  と仮定する。  $S_{F_1} - A_{F_1}$  は semi-algebraic

subset なので, Milnor の curve selection lemma によって,  $\exists \lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^{\mu-1}$ ,  $\lambda(0)=0$ ,  $\lambda(t) \in S_{F_1} - A_{F_1}$  ( $\forall t > 0$ ).  $F_{1,\lambda(t)}$  は constant Milnor number  $\mu(f_1)$  を持つ real parameter  $t$  に関する smooth family なので, [ ] によつて, 次の relative homeo. を得る:

$$(\mathbb{C}^2, V(F_{1,\lambda(t)})) \simeq (\mathbb{C}^2, V(f_1)) \quad (\forall t \in [0, \infty)).$$

今  $F_{1,\lambda(t)}$  の  $\mathbb{C}\{x, y\}$  における既約分解を

$$F_{1,\lambda(t)} = \prod_{i=1}^k f_{it} \quad (\forall t \in [0, \infty))$$

とおけば,

$$(\mathbb{C}^2, V(f_{1i})) \simeq (\mathbb{C}^2, V(f_{it}))$$

$$(V(f_{1i}) \cdot V(f_{1j}))_0 = (V(f_{it}) \cdot V(f_{jt}))_0,$$

ここで,  $(\cdot)_0$  は原点における交点数。これは, plane curve の relative topological type は, 各々の既約成分の relative topological type と既約成分の間の交点数で決まるという, Zariski & Hirsonaka の定理([6])に依る。plane curves の family  $V(F_{1,\lambda(t)})$  は uniform stable radius をもつので,  $f_{it}$  の  $t$  に関する連続性は保証される。([4] 参照)

以下, 一般性を失うことなく  $b \leq a$  と仮定してよい。又, 以下の議論は固定された parameter  $t > 0$  に対して進む。plane curve の mult. は位相不変量なので,

$$(\mathbb{C}^2, V(f_{it})) \simeq (\mathbb{C}^2, V(f_{ii}))$$

となることから  $\text{order}(f_{it}) = d$ 。  $V(f_{it})$  の tangent cone は一つの方角しか持たないので、

$$f_{it}(x, y) = (b_{0i}y + a_{0i}x)^d + \text{the higher}, \quad b_{0i} \neq 0,$$

ここで、  $b_{0i} \neq 0$  は  $f_{it}$  と  $f_{ii}$  が近いことによる。このとき Weierstrass の preparation theorem によつて、

$$f_{it}(x, y) = u_{it}(x, y) \left\{ (y + a'_{0i}x)^d + \sum_{j=1}^d (y + a'_{0i}x)^{d-j} \phi_{ij}(x) \right\},$$

ここで、  $u_{it}$  は  $\mathbb{C}\{x, y\}$  の unit で

$$\phi_{ij} \in \mathbb{C}\{x\}, \quad \text{order}(\phi_{ij}) > j \quad (\forall i, j).$$

今、

$$f_{it}(x, y) = (y + a'_{0i}x)^d + \sum_{j=1}^d (y + a'_{0i}x)^{d-j} \phi_{ij}(x)$$

$$u_{+}(x, y) = \prod_{i=1}^k u_{it}(x, y)$$

と置きなおす。  $f_{it}(x, y) = 0$  の  $y$  についての  $d$  個の根のうちの一つを  $y_i(x)$  とおくと、  $y_i(x)$  の次のような Puiseux 展開が得られる。

$$y_i(x) = \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} x^{(c_i+j)/d}, \quad b_{i0} \neq 0,$$

ここで、上の展開で初めの方の和  $\sum_i := \sum a_{ij} x^{c_i+j}$  があるときは、  $c_i \in \mathbb{N}$   $1 \leq c_i + j < c/d$   $a_{i0} \neq 0$  ( $i = 1, \dots, k, j = 0, \dots, p_i$ )。

$$X := x, \quad Y_i := y - \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j} \quad (i = 1, \dots, k)$$

とおけば、座標  $(X, Y_i)$  に対して

$$\begin{aligned}
 f_{it}(x, y) &= \prod_{\eta^d=1} (y - j_i(\eta \cdot x)) \\
 &= \prod_{\eta^d=1} (Y_i - Y_i(\eta \cdot X)) \\
 &= Y_i^d + (-b_{i0})^d X^c + \psi_{it}(X, Y_i)
 \end{aligned}$$

但し,  $j_i(\eta \cdot x) = \sum a_{ij} x^{c_i+j} + \sum b_{ij} \eta^{c+j} x^{(c+j)/d}$

$$Y_i(\eta \cdot X) = \sum b_{ij} \eta^{c+j} X^{(c+j)/d}$$

$$\psi_{it} \in \mathcal{C}\{X, Y_i\}, \text{ order}(\psi_{it}) > 1 \text{ (weights } (\frac{1}{c}, \frac{1}{d}) \text{)}.$$

従, て,

$$f_{it}(x, y) = (y - \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j})^d + (-b_{i0})^d x^c + \psi_{ij}(x, y - \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j}).$$

今, 函数  $f$  をある weights に関して homogeneous 分解したときの initial part を  $\text{In}(f)$  と書くことにすれば,

$$\text{In}(f_{it}) = (y - a_{i0} x^{c_i})^d \text{ (weights } (\frac{1}{c_i d}, \frac{1}{d}) \text{) if } \sum_i \neq 0.$$

$$\text{In}(f_{it}) = y^d + (-b_{i0})^d x^c \text{ (weights } (\frac{1}{c}, \frac{1}{d}) \text{) otherwise.}$$

$$\text{In}(U_t) = K \text{ (定数) (any weights).}$$

$\lambda(t) \in S_{F_1} - A_{F_1} \neq \emptyset$  という仮定から,  $\exists i, \sum_i \neq 0$ 。そうでなければ,

$$\text{order}(F_{1\lambda(t)}) = \text{order}(U_t \cdot \prod_{i=1}^k f_{it}) \geq \text{degree}(f_1) = k \left( \frac{1}{c}, \frac{1}{d} \right)$$

すなわち

$$\text{order}(F_{1\lambda(t)}) \geq \text{degree}(f_1) = 1 \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right)$$

となってしまう。

$$c_1 = \min \{ c_i \mid \sum_i \neq 0 \}$$

と仮定してもよい。今  $c_i = c_1$  ならば常に  $a_{i0} = a_{10}$  になると



とする。

$$m := \#\{i \mid c_i = c_1\}$$

とおく。そのとき, initial part の評価から

$$\text{In}(F_{1\lambda(t)}) = K \cdot y^{(k-m)d} (y - a_{10} x^{c_1})^{md} \left(\frac{1}{c_1 d}, \frac{1}{d}\right).$$

従って,  $F_{1\lambda(t)}$  は単項式  $y^{b-1} x^{c_1}$  を項として含むことになるが  
これは  $F_{1\lambda(t)}$  が単項式  $x^i y^{b-1}$  ( $i \geq 1$ ) を項として含まないこ  
とに反する。故に,  $m=1$  ならば, 直ちに  $S_{F_1} - A_{F_1} = \emptyset$  を得  
る。  $m \geq 2$  ならば,  $\exists \ell (\neq 1), c_\ell = c_1, a_{\ell 0} \neq a_{10}$ 。このとき

$$\begin{aligned} cd &= (V(f_{11}) \cdot V(f_{1\ell})). \\ &= (V(f_{1\ell}) \cdot V(f_{1\ell+t})). \\ &= \text{order}(f_{1\ell+t}(\tau^d, y_1(\tau^d))) \\ &= \text{order}\left(\prod_{\eta^d=1} (y_1(\tau^d) - y_\ell(\eta \cdot \tau^d))\right) \\ &= \text{order}((a_{10} - a_{\ell 0})^d \tau^{c_1 d^2} + \text{the higher}) \\ &= c_1 d^2 \end{aligned}$$

しかし, これは  $c_1 < c/d$  に反する。従って,  $S_{F_1} - A_{F_1} = \emptyset$   
一方  $S_{F_1} \supset A_{F_1}$  なので,  $S_{F_1} = A_{F_1}$ 。よって, 補題が示された

$$\begin{aligned} \text{補題2. } b \leq a \text{ のとき, } S_{F_2} &= A_{F_2} \\ a \leq b \text{ のとき, } S_{F_2'} &= A_{F_2'}. \end{aligned}$$

証明.  $S_{F_2} - A_{F_2} \neq \emptyset$  と仮定すると,  $\exists \lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^{\mu-1}$ ,

real analytic,  $\lambda(0)=0$ ,  $\lambda(t) \in S_{F_2} - A_{F_2} (\forall t > 0)$ .

$$f_2(x, y) = x \cdot \prod_{i=0}^k (y^d + z_i x^c) =: \prod_{i=0}^k f_{2i}(x, y)$$

に対して,  $F_{2\lambda(t)}$  (resp.  $F'_{2\lambda(t)}$ ) の  $\mathcal{C}\{x, y\}$  における既約分解

$$F_{2\lambda(t)} = \prod_{i=0}^k f_{it} \quad (\text{resp. } F'_{2\lambda(t)} = \prod_{i=0}^k f'_{it}) \quad (\forall t \in [0, \infty))$$

を得る。このとき,

$$(\mathcal{C}^2, V(f_{2i})) \simeq (\mathcal{C}^2, V(f_{it})) \quad (\text{resp. } (\mathcal{C}^2, V(f'_{2i})) \simeq (\mathcal{C}^2, V(f'_{it})))$$

$$(V(f_{2i}) \cdot V(f_{2j}))_0 = (V(f_{it}) \cdot V(f_{jt}))_0.$$

$$(\text{resp. } (V(f'_{2i}) \cdot V(f'_{2j}))_0 = (V(f'_{it}) \cdot V(f'_{jt}))_0).$$

以下, 議論は固定された parameter  $t$  に対して進行する。

まず,  $b \leq a$  の場合を考える。補題1と同じようにして, unit  $u_{it} \in \mathcal{C}\{x, y\}$  を無視すれば

$$f_{it}(x, y) = (y - \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j})^d + (-b_{i0})^d x^c + \psi_{ij}(x, y - \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j})$$

$F_{2\lambda(t)}$  は単項式  $y^{b+i}$  ( $i \geq 1$ ) を項として含まないので,

$$f_{0t}(0, y) \equiv 0.$$

$f_{0t}(x, y)$  は  $f_{20}(x, y) = x$  に近いので,

$$f_{0t}(x, y) = u_{0t} \cdot x,$$

$u_{0t} \in \mathcal{C}\{x, y\}$  は unit である。ここで

$$f_{0t}(x, y) := x, \quad u_t := \prod_{i=0}^k u_{it}$$

とおきなおす。  $\lambda(t) \in S_{F_2} - A_{F_2} \neq 0 (\forall t > 0)$  という仮定から

補題1のような exponent  $c_1$  を選べる。なぜなら

$$\begin{aligned} \text{order}(F_{2\lambda(t)}) &= \text{order}(u_t \cdot \prod_{i=0}^k f_{i,t}) \geq \text{degree}(x) + \sum_{i=1}^k \text{degree}(f_{i,t}) \\ &= \frac{1}{c} + k \left( \frac{1}{c}, \frac{1}{d} \right), \end{aligned}$$

すなわち

$$\text{order}(F_{2\lambda(t)}) \geq 1 \left( \frac{1}{a+1}, \frac{a}{(a+1)b} \right).$$

$m := \#\{i \mid C_i = C_1\}$  とし,  $C_i = C_1$  ならばいつでも  $a_{i0} = a_{10}$  とすると,  $F_{2\lambda(t)}$  は項  $K \cdot x y^{(k-m)d} (y - a_{10} x^{C_1})^{md}$  を含む。従って,  $F_{2\lambda(t)}$  は単項式  $x^{C_1+1} y^{b-1}$  を含むことになるが, それは  $F_{2\lambda(t)}$  が単項式  $x^{i+1} y^{b-1}$  ( $i \geq 1$ ) を含まないことに反する。従って,  $m=1$  ならば我々は直ちに結論  $S_{F_2} = A_{F_2}$  を得る。次に  $m \geq 2$  ならば,  $\exists l (\neq 1), C_l = C_1, a_{l0} \neq a_{10}$ 。補題1と同じ議論をすると,  $C_1 = c/d$  となるがこれは矛盾である。従って  $S_{F_2} = A_{F_2}$  を得る。よって,  $b \leq a$  の場合の証明を得る。

次に  $a \leq b$  の場合を考える。このとき

$$f_2(x, y) := y f_1(x, y) \quad b \leq a$$

を考えれば十分である。この  $f_2$  に対応して mini-transversal family  $F'_{2t}$  を考える。この  $F'_{2t}$  は単項式  $x^i y^b$  ( $i \geq 1$ ) を含まないことに注意せよ。  $f'_{0t}$  は  $f_{20}$  に近いので

$$f'_{0t}(x, y) = b'_{00} y + a'_{00} x + \text{the higher } b'_{00} \neq 0.$$

Weierstrass の preparation theorem から

$$f'_{0t}(x, y) = u_{0t}(x, y) \left\{ y - \sum_{j=0}^{p_0} a_{0j} x^{c_0+j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{0j} x^{d_0+j} \right\},$$

ここで,  $d_0 \in \mathbb{N}$ ,  $d_0 \geq c/d$  で, 上の展開で初めの有限和があ

るときは,  $c_0 \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq c_0 + j < c/d$   $a_{00} \neq 0$  であるとする。

先の補題と同じようにして, unit  $u_{it} \in \mathbb{C}\{x, y\}$  を無視して次を得る。

$$f'_{it}(x, y) = (y - \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j})^d + (-b_{i0})^d x^c + \psi_{ij}(x, y - \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j})$$

ここで

$$f'_{0t}(x, y) = y - \sum_{j=0}^{p_0} a_{0j} x^{c_0+j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{0j} x^{d_0+j}$$

とおきなおし,

$$u_{it} = \prod_{i=0}^k u_{it}$$

とおく。  $\lambda(t) \in S_{F'_2} - A_{F'_2} \neq \emptyset$  ( $t > 0$ ) という仮定から,

$\exists i$  ( $0 \leq i \leq k$ ),  $a_{i0} \neq 0$ 。なぜなら, そうでなければ

$$\begin{aligned} \text{order}(F'_{2\lambda(t)}) &= \text{order}(u_t \cdot \prod_{i=0}^k f'_{it}) \geq \text{degree}(y) + \sum_{i=1}^k \deg(f'_{it}) \\ &= \frac{1}{d} + k \left( \frac{1}{c}, \frac{1}{d} \right), \end{aligned}$$

すなわち

$$\text{order}(F'_{2\lambda(t)}) \geq 1 \quad \left( \frac{b}{(b+1)a}, \frac{1}{b+1} \right).$$

今  $c_g := \min\{c_i \mid a_{i0} \neq 0 \ (0 \leq i \leq k)\}$  とおく。  $c_g = c_i$  な

らばいつでも  $a_{g0} = a_{i0}$  であるとする。このとき,  $c_g = c_0$  な

らば,  $F'_{2\lambda(t)}$  は項  $K \cdot y^{(k-m)d} (y - a_{00} x^{c_g})^{md+1}$  を含み, そう

でなければ, 項  $K \cdot y^{(k-m)d+1} (y - a_{g0} x^{c_g})^{md}$  を含む。これ

らの事実は  $f'_{it}$ ,  $f'_{0t}$  のある weights に対する initial part

を評価することからわかる。従って, いずれにしても  $F'_{2\lambda(t)}$

は単項式  $x^{c_g} y^b$  を含むことになるが, これは  $F'_{2\lambda(t)}$  が単項式

$x^i y^b (i \geq 1)$  を含まないという仮定に反する。従って,  
 $\#\{i \mid C_g = C_i (0 \leq i \leq k)\} = 1$  ならば, 直ちに  $S_{F'_1} = A_{F'_1}$  を得  
 る。  $\#\{i \mid C_g = C_i (0 \leq i \leq k)\} \geq 2$  ならば,  $\exists l (\neq g), C_g = C_l$   
 $a_{g0} \neq a_{l0}$ 。このとき,  $g=0$  ならば

$$\begin{aligned} C &= (V(f'_{20}) \cdot V(f'_{2l}))_0 \\ &= (V(f'_{0t}) \cdot V(f'_{lt}))_0 \\ &= \text{order}(f'_{lt}(\tau, y_0(\tau))) \\ &= \text{order}\left(\prod_{i=1}^d (y_0(\tau) - y_l(\eta_i \tau))\right) \\ &= \text{order}((a_{00} - a_{l0})^d \tau^{\text{Cod}} + \text{the higher}) \\ &= C_0 d, \end{aligned}$$

ここで,  $y_0(x) = \sum_{j=0}^{p_0} a_{0j} x^{c_0+j} - \sum_{j=0}^{\infty} b_{0j} x^{d_0+j}$  で  $y_l(x)$  は補題1  
 と同じとする。しかし, これは  $C_0 < C/d$  に矛盾する。  $g, l \neq 0$   
 ならば先の補題と同様にして,  $C_0 = C/d$  を得るがこれもやは  
 り矛盾である。よって,  $S_{F'_2} = A_{F'_2}$  を得,  $0 \leq b$  の場合の証  
 明も完了する。

補題3.

$$S_{F_3} = A_{F_3}$$

証明.  $S_{F_3} - A_{F_3} \neq \emptyset$  と仮定する。  $\exists$  real analytic curve  
 $\lambda: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^{M_3-1}, \lambda(0)=0, \lambda(t) \in S_{F_3} - A_{F_3} (\forall t > 0)$ .  
 このとき,  $f_3$  の  $\mathbb{C}[x, y]$  における既約分解

$$f_3(x, y) = xy \prod_{i=1}^k (y^d + \zeta_i x^c) =: \prod_{i=-1}^k f_{3i}(x, y)$$

に対応して,  $F_{3\lambda(t)}$  の既約分解

$$F_{3\lambda(t)} = \prod_{i=-1}^k f_{it} \quad (Vt \in [0, \infty))$$

を得, しかも

$$(\mathcal{C}^2, V(f_{2i})) \simeq (\mathcal{C}^2, V(f_{2j}))$$

$$(V(f_{2i}) \cdot V(f_{2j}))_0 = (V(f_{it}) \cdot V(f_{jt}))_0.$$

以下, 一般性を失うことなく  $b \leq a$  と仮定できる。尚, 以下の議論は固定された parameter  $t > 0$  に対して進行する。

先の補題と同様にして, unit  $u_{it} \in \mathcal{C}\{x, y\}$  を無視すれば

$$f_{0t}(x, y) = y - \sum_{j=0}^{p_0} a_{0j} x^{c_0+j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{0j} x^{d_0+j}$$

$$f_{it}(x, y) = (y - \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j})^d + \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} x^{(c_i+j)/d} + \psi_{ij}(x, y) - \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j}$$

を得る。  $F_{3\lambda(t)}$  は単項式  $y^{b+1+i}$  ( $i \geq 1$ ) を含まないので,

$f_{-1t}(0, y) \equiv 0$ .  $f_{-1t}(x, y)$  は  $f_{3,-1}(x, y) = x$  に近いので

$$f_{-1t}(x, y) = u_{-1t} \cdot x \quad u_{-1t} \in \mathcal{C}\{x, y\}, \text{ unit}$$

を得る。今

$$f_{-1t}(x, y) = x, \quad u_t = \prod_{i=-1}^k u_{it}$$

とおきなおすと,  $\lambda(t) \in S_{F_3} - A_{F_3} \neq \emptyset$  ( $t > 0$ ) という仮定より,  $\exists i, a_{i0} \neq 0$ 。なぜなら, そうでなければ,

$$\begin{aligned} \text{order}(F_{3\lambda(t)}) &= \text{order}(u_t \cdot \prod_{i=-1}^k f_{it}) \geq \text{degree}(x) + \text{degree}(y) \\ &\quad + \sum_{i=0}^k \text{degree}(f_{it}) \\ &= \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + k \quad (\frac{1}{c}, \frac{1}{d}). \end{aligned}$$

すなわち

$$\text{order}(F_{3\lambda(t)}) \geq 1 \left( \frac{b}{ab+a+b}, \frac{a}{ab+a+b} \right).$$

今,  $C_g := \min \{C_i \mid a_{i0} \neq 0 \ (0 \leq i \leq k)\}$  とおき,  $C_j = C_i$  ならば常に  $a_{j0} = a_{i0}$  となるとする。このとき,  $C_j = C_0$  ならば,  $F_{3\lambda(t)}$  は項  $k \cdot x y^{(k-m)d} (y - a_{00} x^{C_g})^{md+1}$  を含み, そうでなければ, 項  $k \cdot x y^{(k-m)d+1} (y - a_{j0} x^{C_g})^{md}$  を含む。従って,  $F_{3\lambda(t)}$  は単項式  $x^{C_g+1} y^b$  を項として含むことになるが, これは  $F_{3\lambda(t)}$  が項  $x^{i+1} y^b$  ( $i \geq 1$ ) を含まないことに反する。従って  $\#\{i \mid C_g = C_i \ (0 \leq i \leq k)\} = 1$  ならば, 直ちに結論を得る。  
 $\#\{i \mid C_g = C_i \ (0 \leq i \leq k)\} \geq 2$  ならば, 補題2と同様にして矛盾を得る。よって, いずれにしても  $S_{F_3} = A_{F_3}$  を得る。

先の補題から次の定理を得る。

定理.  $f$  を孤立特異点を持つ corank 2 の quasihomogeneous function とすると, algebraic subset

$$S_F = \{t \in \mathbb{C}^{M-1} \mid \mu(F_t) = \mu(f)\}$$

は non-singular で, その次元は  $f$  の Newton boundary の上およびその上にある有限次元ベクトル空間  $\mathbb{C}\{x, y\} / (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y)$  の単項式基の個数に等しい。

証明. 斉藤[5]に依れば

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(x_1, x_2) + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$f_0 \in \pi^3(\mathbb{C}\{x, y\})$ ,  $f_0$  は孤立特異点をもつ *quasihomogeneous* とできる。 $f_0(x, y)$  は次の単項式の組のうちいずれかを含む;  $x^a, y^b$  ( $a, b \geq 3$ ),  $x^{a+1}, x y^b$  ( $a, b \geq 2$ ),  $x^{a+1} y, x y^{b+1}$  ( $a, b \geq 1$ )。従って,  $f_0$  は先の  $f_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) のうちのいずれかと考えてよい。

$$G_i(x, y, z, t) = F_i(x, y, t) + z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2 \quad i=1, 3$$

$$G_2(x, y, z, t) = \begin{cases} F_2(x, y, t) + z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2 \\ F_2'(x, y, t) + z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2 \end{cases}$$

とおく。このとき,  $G_{jt}$  は  $f$  の mini-transversal family となる。 $\mu(G_{jt}) = \mu(f) \Leftrightarrow \mu(F_{jt}) = \mu(f_0)$  なので, 前の補題から,  $S_{G_j} = A_{G_j}$ 。 $G_0$  を  $f$  の別の mini-transversal family とし,  $\tau: (\mathbb{C}_0^{M-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}_t^{M-1}, 0)$  を  $G_0$  と  $G_{jt}$  の同値を与える双正則写像とする。この  $\tau$  によ, て, 解析同値  $S_G \cong S_{G_j}$  を得る。従って,  $S_G$  は  $A_{G_j}$  と同じ次元の non-singular algebraic subset である。故に定理は示された。

この定理から初めに掲げた系は直ちに導びかれる。



## 参考文献

1. V.I. Arnold : Russian Math. Surveys 29 (1974)
2. ——— : Inv. math. 35 (1976).
3. A.M. Gabrielov & A.G. Kushnirenko : Func. Anal. i Ego Prilozheniya, Vol. 9 (1975).
4. Lê Dũng Tráng & C.P. Ramanujan : Am. J. Math. 98 (1976)
5. K. Saito : Inv. math. 14 (1971)
6. B. Teissier : Proc. Sym. in Pure Math. 29 (1975).
7. E. Yoshinaga & M. Suzuki : Inv. math. 55 (1979).